III. DYNAMIK

III.1 Kraftfelder

$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ Newton 2 (3.1)

benötigt Kraft-Gesetz $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = ?$

insbesondere außerhalb von $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Strategie: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \xrightarrow{(3.1)} \vec{r}(t)$ „Mechanik"

Beispiel: $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\,(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t))$

Lorentzkraft (3.2)

umgekehrt: $\vec{r}(t) \xrightarrow{\text{Maxwell}} \vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t)$ „E-Dynamik"

Bemerkungen:

- $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \ddot{\vec{r}} = 0 \rightsquigarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$ Newton 1
  definiert Inertialsystem
- m ist positiver Skalar, „träge Masse", Eigenschaft des Teilchens
- $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ hängt nicht ab von $\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$ etc. / $\vec{F}(\vec{r}, t)$ „Kraft<u>feld</u>"

Newton 2 = gekoppeltes System von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung in $\vec{r}(t)$

Lösungsidee: kenne $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ zu einer Zeit t.

$$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + dt \cdot \vec{v}(t)$$

$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + dt \cdot \vec{a}(t) \overset{(3.1)}{=} \vec{v}(t) + dt \cdot \frac{1}{m} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$$

Lektion: eindeutige Lösung erfordert Anfangsbedingungen

↳ $\vec{r}(t)$ für $t > t_0$ $\qquad \vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0)$

Fall 1: freier Fall (auch Würfe)

Gravitations-Kraftgesetz:

$\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2} \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}_0} \quad \text{Newton} \quad (3.3)$$

wähle Ursprung auf Erdoberfläche $\rightsquigarrow$ $\vec{r}_0 = -R\vec{e}_3$ $\quad R \approx 6370\,\text{km}$

Näherung nahe der Erdoberfläche: $|\vec{r}| \ll R$

$$\vec{F}(\vec{r}) \doteq -\gamma m M \frac{(x, y, z+R)}{[x^2+y^2+(z+R)^2]^{3/2}} \doteq -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z+R}{R}\right)}{\left[\left(\frac{x}{R}\right)^2+\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{z+R}{R}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\approx -\gamma \frac{mM}{R^2} \frac{(0,0,1)}{[0^2+0^2+1^2]^{3/2}} \doteq -mg\,\vec{e}_3 \quad \text{mit} \quad g = \frac{\gamma M}{R^2} \quad (3.4)$$

Wähle AW! Herunterfallen: $\begin{cases} \vec{r}(0) \doteq (0,0,h) \\ \dot{\vec{r}}(0) \doteq (0,0,0) \end{cases}$

Newton: $\cancel{m}(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -\cancel{m} g\,(0,0,1)$

in Komponenten: $\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \quad (*)$

Lösung: $x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = ?$

Ansatz: z.B. $z(t) = A + B\cdot t + C\cdot t^2 + D\cdot t^3 + E\cdot \sin\omega t$

Einsetzen: $\dot{z}(t) = B + 2C\cdot t + 3D\cdot t^2 + E\omega\cos\omega t$

$\ddot{z}(t) = 2C + 6D\cdot t - E\omega^2 \sin\omega t$

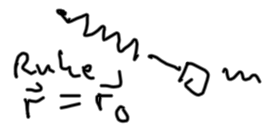
Vergleich mit $(*)$ gibt: $2C = -g, \quad D = 0, \quad E = 0$

Vergleich mit AW gibt: $0 = \dot{z}(0) = B, \quad h = z(0) = A$

eindeutige Lösung: $z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (3.5)$

Fall 2: harmonischer Oszillator

Hooke: $\vec{F}(\vec{r}) = -K(\vec{r} - \vec{r}_0) \qquad (3.6)$



wähle $\vec{r}_0 = 0$

Newton: $m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = -K(x, y, z)$

für x-Komponente: $\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$ ⊗

Ansatz: $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ •

Einsetzen: $\dot{x}(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$ ∘

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

$$\overset{!}{\underset{\otimes}{=}} -\frac{k}{m}\left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)$$

Vergleich: $\omega^2 = k/m$ ✓

es fehlen noch die AW, z.B. $\vec{r}(0) = \vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$.

also: $x(0) = x_1$, $\dot{x}(0) = 0$

Einsetzen in • & ∘ : $A \overset{!}{=} x_1$, $B\omega \overset{!}{=} 0$

zusammen: $x(t) = x_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

für alle Komponenten: $\vec{r}(t) = \vec{r}_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$ (3,7)

[Spezialfall für AW, $\vec{r}(0) = \vec{r}_1$, $\dot{\vec{r}}(0) = 0$]

III.2 Impuls und Drehimpuls

Impuls: $\vec{p} := m\vec{v}$ (3.8)

$\rightarrow$ Newton 2: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (3.9)

falls $\vec{F} = 0 \rightsquigarrow \dot{\vec{p}} = 0 \rightsquigarrow \vec{p} = \text{konst.}$ Impulserhaltung

2-Teilchen-System, isoliert:

Gesamtimpuls $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$

Schwerpunktsbewegung:

$$\vec{R}_s := \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) \quad \text{mit} \quad M = m_1 + m_2$$

$$\dot{\vec{R}}_s = \frac{1}{M}\left(m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2\right) = \frac{1}{M}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \vec{P}/M = \text{const.} = \vec{V}$$

$$\rightsquigarrow \vec{R}_s(t) = \vec{R}_s(0) + \vec{V}\cdot t$$

Drehimpuls: $\vec L := m\,\vec r\times\vec v = \vec r\times\vec p$ (3.10)

abhängig vom Bezugspunkt (hier: $\vec r_0 = 0$)

mit Newton 2: $\dot{\vec L} = m\,\cancel{\dot{\vec r}\times\dot{\vec r}}^{\,0} + m\,\vec r\times\ddot{\vec r} = \vec r\times\vec F =: \vec N$

Drehmoment (3.11)

$\vec N = 0$ falls $\vec F = 0$ oder $\vec F \parallel \vec r$, d.h.

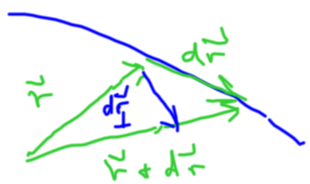
$$\vec F(\vec r,\dot{\vec r},t) = f(\vec r,\dot{\vec r},t)\cdot\vec e_r \quad \text{Zentralkraft}$$

2-Teilchen-System isoliert:

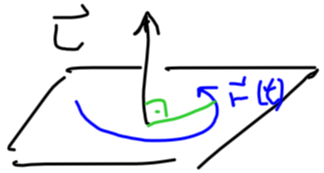
es gilt $\vec L = \vec L_1 + \vec L_2 = \text{konst.}$ $\leftarrow$ Erhaltung des Gesamt-Drehimpulses

geometrische Interpretation der Drehimpulserhaltung:

- $\vec r\cdot\vec L = \vec r\cdot(m\,\vec r\times\dot{\vec r}) = 0 \underset{\vec L = \text{konst.}}{\rightsquigarrow}$ Ebenengleichung für $\vec r(t)$
- $\frac{1}{m}L = |\vec r\times\dot{\vec r}| = r\cdot v_\perp = r\left|\frac{d\vec r_\perp}{dt}\right|$



$= 2\cdot$(in dt überstrichene Fläche △)$/dt$ $\leftarrow$ 2. Kepler-Gesetz



III.3 Energie und Potenzial

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad |\cdot\dot{\vec{r}} \quad \rightsquigarrow \quad m\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} \qquad (3.12)$$

$$\partial_t\left(\tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{F} \quad \text{Leistung}$$

kinetische Energie $T := \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ (3.13)

wenn $\exists$ Funktion $V(\vec{r})$ („Potenzial") so daß

$$\vec{F}(\vec{r},\cancel{\dot{\vec{r}}},\cancel{t}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \qquad (3.14)$$

dann gilt $\partial_t V(\vec{r}(t)) = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}$

und somit $\partial_t T = -\partial_t V$

kin., pot. Energie

$\rightsquigarrow$ Energie-Erhaltung: $\partial_t(T+V) = 0 \iff$

$$T+V = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)) = \text{konst.} =: E \qquad (3.15)$$

solche Kraft-Gesetze heißen „konservativ"

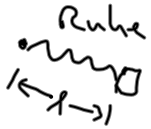
Beispiele:

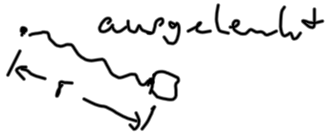
A) $\vec{F} \doteq (0, 0, -mg) = (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \partial_x V \\ 0 = \partial_y V \\ mg = \partial_z V \end{cases} \Rightarrow V = V(z)$$

$$mg = V'(z) \rightsquigarrow V = mgz + \cancel{c}^{\,=0} \qquad (3.16)$$

B) $\vec{F} = -k(r-l)\,\vec{e}_r$





raten: $V(\vec{r}) = \frac{k}{2}(r-l)^2$? $\quad (3.17)$

Test: $\vec{\nabla} V(r) \doteq \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} V(r) = V'(r) \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} r = \otimes$

$\begin{bmatrix} i = 1,2,3 \\ = x,y,z \end{bmatrix}$

nützlich: $\partial_i r = \partial_i \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial_i (x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2x_i}{2r} = \frac{x_i}{r}$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \Leftrightarrow \vec{\nabla} r = \vec{e}_r \qquad (3.18)$$

$$\rightsquigarrow \vec{\nabla} f(r) = f'(r) \cdot \vec{\nabla} r = f'(r)\,\vec{e}_r$$

$$\otimes = V'(r) \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} \doteq k(r-l)\,\vec{e}_r \quad \checkmark$$

allgemein:

$\longleftrightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

Zentralkraft: $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r$

kons. Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$\longleftrightarrow \dot{E} = 0$

beides: konservative Zentralkraft: (3.19)

$\vec{F} = f(r)\, \vec{e}_r$ oder $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r)$, $f = -V'$

c) $\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$ kons. Zentralkraft

$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$ (3.20)

D) $\vec{F} \doteq \kappa(-x, z-y, z-y)$ $\exists V$? zu Fuß:

$-F_x = \kappa x \overset{!}{=} \partial_x V \curvearrowright V = \frac{\kappa}{2} x^2 + f(y,z)$

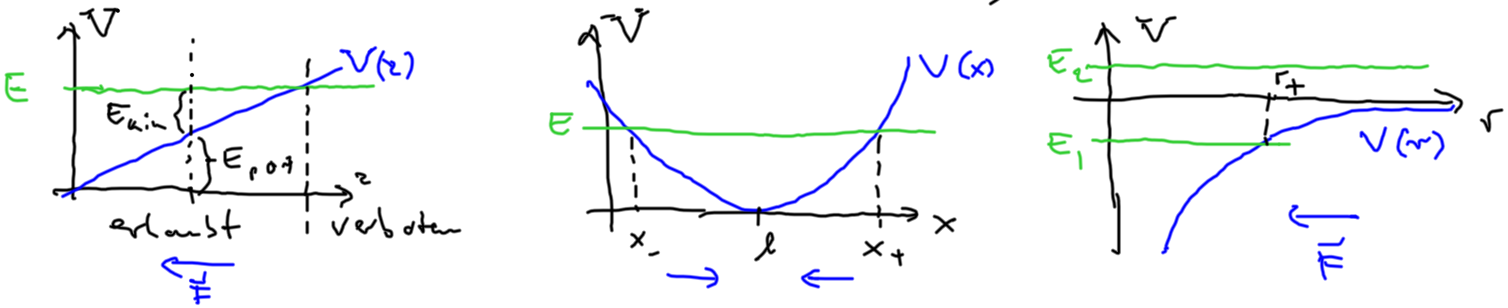
$-F_y = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_y V \overset{!}{=} \partial_y f \curvearrowright f(y,z) = \frac{\kappa}{2} y^2 - \kappa y z + g(z)$

$-F_z = \kappa y - \kappa z \overset{!}{=} \partial_z V \overset{!}{=} -\kappa y + g'(z)$

$\curvearrowright g'(z) = 2\kappa y - \kappa z$ Widerspruch $\lightning$

III.4 Eindimensionale Bewegung mit dem Energiesatz

Bewegungstyp aus Potenzial ablesbar, z.B.



erlaubte Bewegung: $V(x) \le E$, $E - V(x) = T(x) = \frac{1}{2} m v^2$

Umkehrpunkte: $V(x_\pm) = E \iff T(x_\pm) = 0$

Lösung über Energiesatz (statt Newton 2):

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x) \quad \curvearrowright \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \curvearrowright \quad dx = \pm \sqrt{}\, dt \quad \curvearrowright \quad dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{}} \quad \curvearrowright$$

$$\int_{t_0}^{t} dt' = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x')\right)}} \quad \curvearrowright \quad t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x')\right)}} \qquad (3.21)$$

dies liefert $t = t(x) \curvearrowright x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$

gebundene Bewegung ist periodisch, mit Periode

$$T(E) = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}}$$ mit Umkehrpunkten $x_\pm$ (3.22)

III.5 Dreidimensionale Bewegung unter konservativer Zentralkraft

Teilchen unter Einfluß $\vec{F}(r) = -\vec{\nabla} V(r)$

erhalten sind $L = m v_\perp r$ & $E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r)$

$\vec{L} = \text{konst.} \rightsquigarrow$ Bewegung in Ebene $(\vartheta = \pi/2 \Leftrightarrow z = 0)$

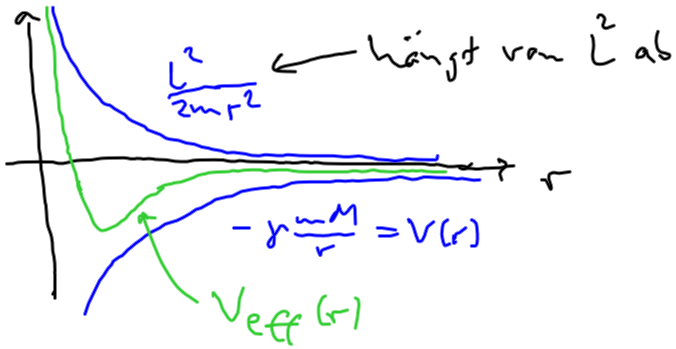
$\vec{v} = \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp$ (bzgl. $\vec{r}$) $\rightsquigarrow v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$ mit $v_\parallel = \vec{v}\cdot\vec{e}_r = \dot{r}$

eliminiere $v_\perp = \frac{L}{mr}$. Jetzt Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\overbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}^{\text{Zentrifugalbarriere}} + V(r)}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underline{V_{\text{eff}}(r)} \qquad \text{„effektives Potenzial"} \qquad (3.23)$$

Beispiel Gravitationspotenzial:



eindimensionales Ersatzproblem mit $V_{eff}(r)$

$$\dot r(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}\,, \quad r\dot\varphi(t) = v_\perp = \frac{L}{m\,r(t)}\,, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad (3.24)$$

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r')\right)}} \;\curvearrowright\; \varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{r^2(t')} \qquad (3.25)$$

→ Parameterdarstellung der Bahn: $r(t)$, $\varphi(t)$, $\vartheta(t)$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} = \frac{L}{mr^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

Polardarstellung der Bahnkurve

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}} \longrightarrow \varphi(r) \longrightarrow r(\varphi) \qquad (3.26)$$

Schwingungsperiode bei gebundener Bewegung

$$T = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} \qquad (3.27)$$

zugehöriger Winkel ist

$$\Delta\varphi = \frac{2L}{\sqrt{2m}} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

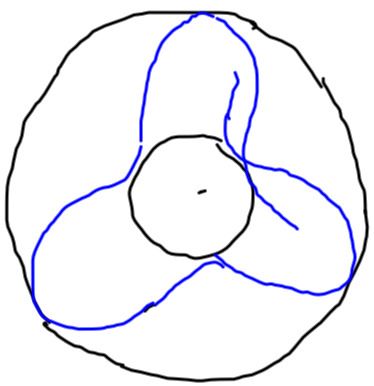
Bahn ist geschlossen falls

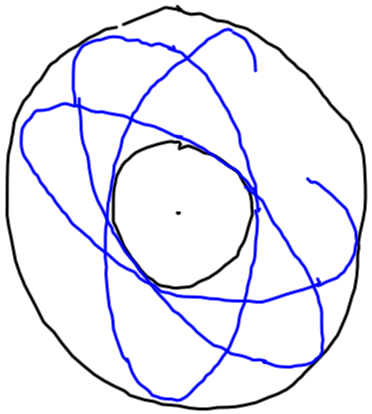
$$k\cdot\Delta\varphi = n\cdot 2\pi$$

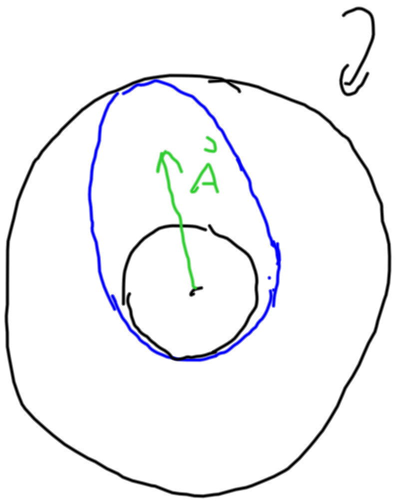
$$k, n \in \mathbb{Z}$$

Beispiele:

Ausnahme!







III.6 Keplerproblem

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (3.28)$$

$\alpha > 0$ attraktiv

$\alpha < 0$ repulsiv

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

Erhaltungssätze:

- Energie $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r}$ (1)
- Drehimpuls $\vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ (3)
- Runge-Lenz Vektor $\vec{A} = \dot{\vec{r}}\times\vec{L} - \alpha\vec{e}_r$ (3.29) (3) aber nur (1) unabh.

$(\vec{e}_r = \vec{r}/r)$

Beweis für $\vec{A}$:

$$\dot{\vec{A}} = \ddot{\vec{r}}\times\vec{L} + \dot{\vec{r}}\times\underbrace{\dot{\vec{L}}}_{=0} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r} - \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}}\times\vec{L} = -\frac{\alpha}{\cancel{m}}\frac{1}{r^3}\vec{r}\times(\cancel{m}\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = -\frac{\alpha}{r^3}\Big(\vec{r}\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}_{= r\dot{r}} - \dot{\vec{r}}\,\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}_{= r^2}\Big)$$

$$= -\frac{\alpha}{r^2}\dot{r}\vec{r} + \frac{\alpha}{r}\dot{\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{A}} = 0 \quad \checkmark$$

Ausrechnen:

$$\vec A^2 = \vec A\cdot\vec A = \left(\dot{\vec r}\times\vec L - \frac{\alpha}{r}\vec r\right)^2$$

$$= \left(\dot{\vec r}\times\vec L\right)^2 - \frac{2\alpha}{r}\left(\dot{\vec r}\times\vec L\right)\cdot\vec r + \frac{\alpha^2}{\cancel{r^2}}\cancel{\vec r^2}$$

$$= \dot{\vec r}^2\vec L^2 - \underbrace{\left(\dot{\vec r}\cdot\vec L\right)^2}_{0} - \frac{2\alpha}{r}\left(\vec r\times\dot{\vec r}\right)\cdot\vec L + \alpha^2$$

$$= \dot{\vec r}^2\vec L^2 - \frac{2\alpha}{r}\,\frac{1}{m}\,\vec L\cdot\vec L + \alpha^2$$

$$= \vec L^2\left(\dot{\vec r}^2 - \frac{2\alpha}{mr}\right) + \alpha^2 = \frac{2L^2}{m}E + \alpha^2$$

$$\curvearrowright \quad A = \alpha\sqrt{1+\frac{2L^2E}{m\alpha^2}} =: \alpha\cdot\varepsilon \qquad (3.30)$$

$\leftarrow$ numerische Exzentrizität

$$\vec A\cdot\vec L = 0$$

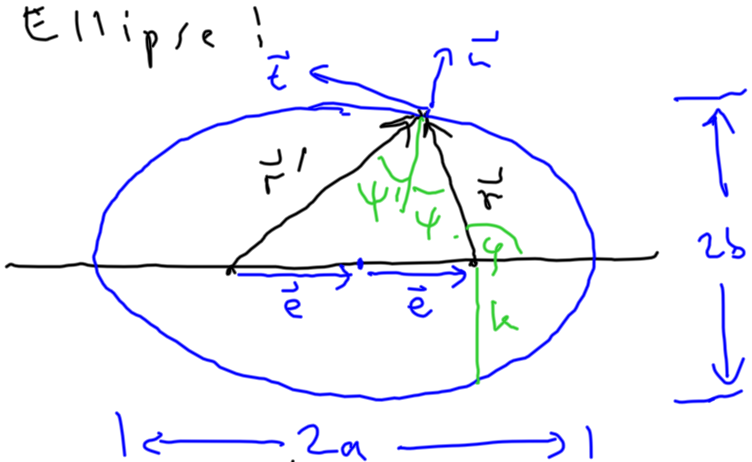
$$\vec A\cdot\vec r = \left(\dot{\vec r}\times\vec L\right)\cdot\vec r - \frac{\alpha}{r}\vec r\cdot\vec r = \frac{L^2}{m} - \alpha r$$

aber auch $\vec A\cdot\vec r = A r\cos\varphi = \alpha\,\varepsilon\, r\cos\varphi$

$\Rightarrow r(\varphi)$!

$$r(\varphi) = \frac{k}{1+\varepsilon\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad k = L^2/m\alpha \qquad (3.31)$$

welche Kurve? Ellipse!



$r + r' =$ konst.

Ä-Linie von

$V(x,y) = r + r'$

$\rightsquigarrow 0 = \vec{\nabla} V \cdot \vec{t}$

$= (\vec{\nabla} r + \vec{\nabla} r') \cdot \vec{t}$

$= (\vec{e}_r + \vec{e}_{r'}) \cdot \vec{t}$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi'\right)$

$= -\sin\psi + \sin\psi'$

$r + r' = 2a$

$r' = 2a - r$

$r'^2 = 4a^2 - 4ar + r^2$

aber auch

$\vec{r}' = 2\vec{e} + \vec{r}$

$\vec{r}'^2 = 4\vec{e}^2 + 4\vec{e} \cdot \vec{r} + \vec{r}^2$

$r'^2 = 4e^2 + 4er\cos\varphi + r^2$

$a^2 - ar = e^2 + er\cos\varphi$

$r(a + e\cos\varphi) = a^2 - e^2$

$r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} =: k \leftarrow$ „Parameter"

Def.:

$\varepsilon := \frac{e}{a} < 1$

$\varepsilon = 0$ Kreis
$\varepsilon = 1$ Parabel
$\varepsilon > 1$ Hyperbel

$r = \frac{k}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ Polardarstellung einer Ellipse ($\varepsilon < 1$)

III.7 Systeme von Massepunkten

N Massepunkte $\vec r_i$ $\quad i=1,\dots,N$ $\qquad \vec r_{jk} = \vec r_j - \vec r_k$

Paarwechselwirkung $\nearrow$ $\vec F_{jk} = F_{jk}(r_{jk}) \cdot \dfrac{\vec r_{jk}}{r_{jk}}$

Kraft von "j" auf "k"

symmetrisch $F_{jk} = F_{kj} \rightarrow \vec F_{jk} = -\vec F_{kj}$

dann folgt:

- Erhaltung des Gesamtimpulses $\vec P = \sum_j \vec p_j$

  denn: $\dot{\vec P} = \sum_j \dot{\vec p}_j = \sum_j \sum_{\substack{k \\ (k\neq j)}} \vec F_{jk} = \sum_{j\neq k} \vec F_{jk} = 0$

$\rightarrow$ Schwerpunkt $\vec R_S = \frac{1}{M} \sum_j m_j \vec r_j$ $\qquad M = \sum_i m_i$

bewegt sich mit konst. Geschw. $\vec V = \vec P / M$

- Erhaltung des Gesamtdrehimpulses $\vec L = \sum_j \vec L_j$

  geht genauso $\quad \dot{\vec L} = 0$

Zwei-Teilchen-System

$$\vec r_1,\ \vec r_2 \longrightarrow \vec R = \frac{m_1\vec r_1 + m_2 \vec r_2}{M}, \quad \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 = \vec r_{12} \quad (3.32)$$

$$M = m_1 + m_2$$

angenommen (3.33) $\vec F_{12} = F(r_{12})\frac{\vec r_{12}}{r_{12}} = F(r)\,\vec e_r = \vec F(r)$

Bewegungsgleichungen:

- Schwerpunktsbewegung ✓
- Relativbewegung:

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_1 - \ddot{\vec r}_2 = \frac{1}{m_1}\vec F_{12} - \frac{1}{m_2}\vec F_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec F(r)$$

$$\rightarrow m\ddot{\vec r} = \vec F(r) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (3.34)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ reduzierte Masse

Rekonstruktion:

$$\vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{M}\vec r, \quad \vec r_2 = \vec R - \frac{m_1}{M}\vec r \quad (3.35)$$

Bsp. Planetenbewegung